CALCUL NUMERIC
SEMINAR 2

NOTIȚE SUPORT SEMINAR

Cristian Rusu

MATRICE 2X2 ȘI 3X3, EX. 1

a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

.

MATRICE 2X2 ȘI 3X3, EX. 1

a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 7, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **și** $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

MATRICE 2X2 ȘI 3X3, EX. 1

a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \to \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 7, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **și** $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \to \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 9$

$$(3\mathbf{I}_2 - \mathbf{A})\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(9\mathbf{I}_2 - \mathbf{A})\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MATRICE 2X2 ȘI 3X3, EX. 1

a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 7, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **și** $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 9$

$$(3\mathbf{I}_2 - \mathbf{A})\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(9\mathbf{I}_2 - \mathbf{A})\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

MATRICE 2X2 ȘI 3X3, EX. 1

c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRICE 2X2 ȘI 3X3, EX. 1

c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 2(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda) - 2] \\ &= (1-\lambda)(-\lambda)(3-\lambda). \end{aligned}$$

.

MATRICE 2X2 ȘI 3X3, EX. 1

c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{aligned} &= (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 2(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda) - 2] \\ &= (1-\lambda)(-\lambda)(3-\lambda). \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}\boldsymbol{x}_1 \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{1}\boldsymbol{x}_2 \qquad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad A\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{3}\boldsymbol{x}_3$$

MATRICE ȘI PUTERI, EX. 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^2 =$$

MATRICE ȘI PUTERI, EX. 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

valorile și vectorii proprii pentru A îi avem de la curs
și avem $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$

care sunt valorile și vectorii proprii pentru $\mathbf{A}^2$?
$\mathbf{A}^2$

MATRICE ȘI PUTERI, EX. 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

valorile și vectorii proprii pentru A îi avem de la curs și avem $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$

care sunt valorile și vectorii proprii pentru $\mathbf{A}^2$?

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}$$

MATRICE ȘI PUTERI, EX. 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

valorile și vectorii proprii pentru A îi avem de la curs
și avem $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$

care sunt valorile și vectorii proprii pentru $\mathbf{A}^2$?

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \mathbf{A}\mathbf{A} \\ &= \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T \end{aligned}$$

MATRICE ȘI PUTERI, EX. 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

valorile și vectorii proprii pentru A îi avem de la curs
și avem $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$

care sunt valorile și vectorii proprii pentru $\mathbf{A}^2$?

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \mathbf{A}\mathbf{A} \\ &= \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T \\ &= \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{D}\mathbf{U}^T \end{aligned}$$

MATRICE ȘI PUTERI, EX. 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

valorile și vectorii proprii pentru A îi avem de la curs

și avem $\mathbf{A} = \mathbf{UDU}^T$

care sunt valorile și vectorii proprii pentru $\mathbf{A}^2$**?**

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \mathbf{AA} \\ &= \mathbf{UDU}^T\mathbf{UDU}^T \\ &= \mathbf{UDDU}^T \\ &= \mathbf{UD}^2\mathbf{U}^T \end{aligned}$$

MATRICE ȘI PUTERI, EX. 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

valorile și vectorii proprii pentru A îi avem de la curs

și avem $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$

care sunt valorile și vectorii proprii pentru $\mathbf{A}^2$?

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \mathbf{A}\mathbf{A} \\ &= \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T \\ &= \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{D}\mathbf{U}^T \\ &= \mathbf{U}\mathbf{D}^2\mathbf{U}^T \end{aligned}$$

valorile proprii sunt ridicate la pătrat iar vectorii proprii sunt aceeași

MATRICE ȘI PUTERI, EX. 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

valorile și vectorii proprii pentru A îi avem de la curs

și avem $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$

care sunt valorile și vectorii proprii pentru $\mathbf{A}^{-1}$**?**

$\mathbf{A}^{-1}$

MATRICE ȘI PUTERI, EX. 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

valorile și vectorii proprii pentru A îi avem de la curs

și avem $\mathbf{A} = \mathbf{UDU}^T$

care sunt valorile și vectorii proprii pentru $\mathbf{A}^{-1}$?

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{UDU}^T)^{-1}$$

MATRICE ȘI PUTERI, EX. 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

valorile și vectorii proprii pentru A îi avem de la curs
și avem $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$

care sunt valorile și vectorii proprii pentru $\mathbf{A}^{-1}$**?**

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= (\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T)^{-1} \\ &= (\mathbf{U}^T)^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^{-1} \end{aligned}$$

MATRICE ȘI PUTERI, EX. 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

valorile și vectorii proprii pentru A îi avem de la curs

și avem $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$

care sunt valorile și vectorii proprii pentru $\mathbf{A}^{-1}$?

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= (\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T)^{-1} \\ &= (\mathbf{U}^T)^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^{-1} \\ &= \mathbf{U}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^T \end{aligned}$$

MATRICE ȘI PUTERI, EX. 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

valorile și vectorii proprii pentru A îi avem de la curs

și avem $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$

care sunt valorile și vectorii proprii pentru $\mathbf{A}^{-1}$?

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= (\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T)^{-1} \\ &= (\mathbf{U}^T)^{-1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^{-1} \\ &= \mathbf{U}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}^T \end{aligned}$$

valorile proprii sunt inversele iar vectorii proprii sunt aceeași

MATRICE ȘI PUTERI, EX. 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

valorile și vectorii proprii pentru A îi avem de la curs

și avem $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$

care sunt valorile și vectorii proprii pentru $\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_2$**?**

$\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_2$

MATRICE ȘI PUTERI, EX. 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

valorile și vectorii proprii pentru A îi avem de la curs

și avem $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$

care sunt valorile și vectorii proprii pentru $\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_2$**?**

$$\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_2 = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T + 4\mathbf{I}_2$$

MATRICE ȘI PUTERI, EX. 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

valorile și vectorii proprii pentru A îi avem de la curs
și avem $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$

care sunt valorile și vectorii proprii pentru $\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_2$?

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + 4\mathbf{I}_2 &= \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T + 4\mathbf{I}_2 \\ &= \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T + 4\mathbf{U}\mathbf{U}^T \end{aligned}$$

MATRICE ȘI PUTERI, EX. 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

valorile și vectorii proprii pentru A îi avem de la curs

și avem $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T$

care sunt valorile și vectorii proprii pentru $\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_2$?

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + 4\mathbf{I}_2 &= \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T + 4\mathbf{I}_2 \\ &= \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T + 4\mathbf{U}\mathbf{U}^T \\ &= \mathbf{U}(\mathbf{D} + 4\mathbf{I}_2)\mathbf{U}^T \end{aligned}$$

MATRICE ȘI PUTERI, EX. 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

valorile și vectorii proprii pentru A îi avem de la curs

și avem $\mathbf{A} = \mathbf{UDU}^T$

care sunt valorile și vectorii proprii pentru $\mathbf{A} + 4\mathbf{I}_2$**?**

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + 4\mathbf{I}_2 &= \mathbf{UDU}^T + 4\mathbf{I}_2 \\ &= \mathbf{UDU}^T + 4\mathbf{UU}^T \\ &= \mathbf{U}(\mathbf{D} + 4\mathbf{I}_2)\mathbf{U}^T \end{aligned}$$

valorile proprii sunt +4 iar vectorii proprii sunt aceeași

MATRICE ȘI PUTERI, EX. 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

urma este suma elementelor de pe diagonală și este egală cu suma valorilor proprii: 2 + 2 (diagonala) = 1 + 3 (val. proprii) = 4

determinantul este produsul valorilor proprii: det(A) = 2x2 - 1 = 3

iar produsul valorilor proprii este 1x3 = 3

verificați voi pentru $\mathbf{A}^2$, etc.

TRANSMISIE BOALĂ, EX. 6

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{AA} & t_{AB} \\ t_{BA} & t_{BB} \end{bmatrix}$$

t_{AA} este probabilitatea de a transmite boala de la A la A

t_{AB} este probabilitatea de a transmite boala de la A la B

t_{BA} este probabilitatea de a transmite boala de la B la A

t_{BB} este probabilitatea de a transmite boala de la B la B

TRANSMISIE BOALĂ, EX. 6

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{AA} & t_{AB} \\ t_{BA} & t_{BB} \end{bmatrix}$$

t_{AA} este probabilitatea de a transmite boala de la A la A
t_{AB} este probabilitatea de a transmite boala de la A la B
t_{BA} este probabilitatea de a transmite boala de la B la A
t_{BB} este probabilitatea de a transmite boala de la B la B

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & m \\ f & 0 \end{bmatrix}$$

TRANSMISIE BOALĂ, EX. 6

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{AA} & t_{AB} \\ t_{BA} & t_{BB} \end{bmatrix}$$

t_{AA} este probabilitatea de a transmite boala de la A la A

t_{AB} este probabilitatea de a transmite boala de la A la B

t_{BA} este probabilitatea de a transmite boala de la B la A

t_{BB} este probabilitatea de a transmite boala de la B la B

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & m \\ f & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda \mathbf{I}_2 - T) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -m \\ -f & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - mf$$

TRANSMISIE BOALĂ, EX. 6

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{AA} & t_{AB} \\ t_{BA} & t_{BB} \end{bmatrix}$$

t_{AA} este probabilitatea de a transmite boala de la A la A
t_{AB} este probabilitatea de a transmite boala de la A la B
t_{BA} este probabilitatea de a transmite boala de la B la A
t_{BB} este probabilitatea de a transmite boala de la B la B

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & m \\ f & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda \mathbf{I}_2 - T) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -m \\ -f & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - mf$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{mf} \rightarrow R_0 = \sqrt{mf}$$

PARTICULA, EX. 7

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

după primul pas avem:

PARTICULA, EX. 7

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

după primul pas avem: $\mathbf{p}_1 = \mathbf{T}\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$

după doi pași avem:

PARTICULA, EX. 7

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

după primul pas avem: $\mathbf{p}_1 = \mathbf{T}\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$

după doi pași avem: $\mathbf{p}_2 = \mathbf{T}\mathbf{p}_1 = \mathbf{T}^2\mathbf{p}_0$

în general:

PARTICULA, EX. 7

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

după primul pas avem: $\mathbf{p}_1 = \mathbf{T}\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$

după doi pași avem: $\mathbf{p}_2 = \mathbf{T}\mathbf{p}_1 = \mathbf{T}^2\mathbf{p}_0$

în general: $\mathbf{p}_n = \mathbf{T}\mathbf{p}_{n-1} = \mathbf{T}^n\mathbf{p}_0$

deci vreau puteri ale matricei T

- **care sunt valorile proprii ale lui T?**

PARTICULA, EX. 7

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

după primul pas avem: $\mathbf{p}_1 = \mathbf{T}\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$

după doi pași avem: $\mathbf{p}_2 = \mathbf{T}\mathbf{p}_1 = \mathbf{T}^2\mathbf{p}_0$

în general: $\mathbf{p}_n = \mathbf{T}\mathbf{p}_{n-1} = \mathbf{T}^n\mathbf{p}_0$

deci vreau puteri ale matricei T

- **care sunt valorile proprii ale lui T?** $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0.4$
- **care sunt vectorii proprii ai lui T?**

PARTICULA, EX. 7

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

după primul pas avem: $\mathbf{p}_1 = \mathbf{T}\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$

după doi pași avem: $\mathbf{p}_2 = \mathbf{T}\mathbf{p}_1 = \mathbf{T}^2\mathbf{p}_0$

în general: $\mathbf{p}_n = \mathbf{T}\mathbf{p}_{n-1} = \mathbf{T}^n\mathbf{p}_0$

deci vreau puteri ale matricei T

- **care sunt valorile proprii ale lui T?** $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0.4$
- **care sunt vectorii proprii ai lui T?** $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

PARTICULA, EX. 7

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

după primul pas avem: $\mathbf{p}_1 = \mathbf{T}\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$

după doi pași avem: $\mathbf{p}_2 = \mathbf{T}\mathbf{p}_1 = \mathbf{T}^2\mathbf{p}_0$

în general: $\mathbf{p}_n = \mathbf{T}\mathbf{p}_{n-1} = \mathbf{T}^n\mathbf{p}_0$

deci vreau puteri ale matricei T

- **care sunt valorile proprii ale lui T?** $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0.4$
- **care sunt vectorii proprii ai lui T?** $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{T} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}$ **și** $\mathbf{T}^n = ?$

PARTICULA, EX. 7

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

după primul pas avem: $\mathbf{p}_1 = \mathbf{T}\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$

după doi pași avem: $\mathbf{p}_2 = \mathbf{T}\mathbf{p}_1 = \mathbf{T}^2\mathbf{p}_0$

în general: $\mathbf{p}_n = \mathbf{T}\mathbf{p}_{n-1} = \mathbf{T}^n\mathbf{p}_0$

deci vreau puteri ale matricei T

- **care sunt valorile proprii ale lui T?** $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0.4$
- **care sunt vectorii proprii ai lui T?** $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{T} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}$ **și** $\mathbf{T}^n = \mathbf{V}\mathbf{D}^n\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0.4^n \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
- **ce se întâmplă când n crește mult?**

PARTICULA, EX. 7

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

după primul pas avem: $\mathbf{p}_1 = \mathbf{T}\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$

după doi pași avem: $\mathbf{p}_2 = \mathbf{T}\mathbf{p}_1 = \mathbf{T}^2\mathbf{p}_0$

în general: $\mathbf{p}_n = \mathbf{T}\mathbf{p}_{n-1} = \mathbf{T}^n\mathbf{p}_0$

deci vreau puteri ale matricei T

- **care sunt valorile proprii ale lui T?** $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0.4$
- **care sunt vectorii proprii ai lui T?** $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{T} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}$ **și** $\mathbf{T}^n = \mathbf{V}\mathbf{D}^n\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0.4^n \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
- **ce se întâmplă când n crește mult?** $\mathbf{T}^\infty = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

ECUAȚII DIFERENȚIALE, EX. 8

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y,$$

$$\frac{dy}{dt} = 4x - 5y,$$

pornind de la $x = 13$ **și** $y = 22$ **când** $t = 0.$

avem matricea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

valorile proprii sunt:

ECUAȚII DIFERENȚIALE, EX. 8

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y,$$

$$\frac{dy}{dt} = 4x - 5y,$$

pornind de la $x = 13$ **și** $y = 22$ **când** $t = 0$.

avem matricea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

valorile proprii sunt: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$

vectorii proprii sunt:

ECUAȚII DIFERENȚIALE, EX. 8

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y,$$
$$\frac{dy}{dt} = 4x - 5y,$$

pornind de la $x = 13$ **și** $y = 22$ **când** $t = 0.$

avem matricea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

valorile proprii sunt: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$

vectorii proprii sunt: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\mathbf{A}^n = ?$

ECUAȚII DIFERENȚIALE, EX. 8

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y,$$

$$\frac{dy}{dt} = 4x - 5y,$$

pornind de la $x = 13$ **și** $y = 22$ **când** $t = 0.$

avem matricea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

valorile proprii sunt: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$

vectorii proprii sunt: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A}^n = (-1)^n \begin{bmatrix} 4 - 3 \times 2^n & -3 + 3 \times 2^n \\ 4 - 4 \times 2^n & -3 + 4 \times 2^n \end{bmatrix}$$

ECUAȚII DIFERENȚIALE, EX. 8

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y,$$

$$\frac{dy}{dt} = 4x - 5y,$$

pornind de la $x = 13$ **și** $y = 22$ **când** $t = 0$.

vectorii proprii sunt: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

facem schimbarea de variabilă $\begin{bmatrix} x_{\text{new}} \\ y_{\text{new}} \end{bmatrix} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y \\ x + 4y \end{bmatrix}$

sistemul de mai sus devine $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = -2y$ **(sunt valorile proprii)**

deci $x_{\text{new}}(t) = x_{\text{new}}(0)e^{-t}$, $y_{\text{new}}(t) = y_{\text{new}}(0)e^{-2t}$

iar $\begin{bmatrix} x_{\text{new}}(0) \\ y_{\text{new}}(0) \end{bmatrix} = \mathbf{V}^{-1} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 6 \end{bmatrix}$

BIBLIOGRAFIE

- aceste exerciții sunt bazate pe:
  - http://ee263.stanford.edu/lectures/eig.pdf
  - https://math.mit.edu/~gs/linearalgebra/ila0601.pdf
  - http://www.numbertheory.org/book/cha6.pdf